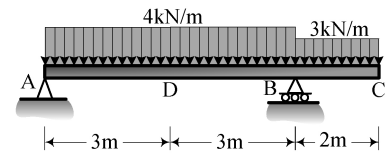


103 年公務人員高等考試試題結構學參考解答

本科由實力專任教師林冠丞老師即時解答

一、試用共軛梁法 求右圖梁結構點 C 和點 D 的垂直位移，設
 $EI = 3,000 \text{ kN-m}^2$ 。(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 103 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： $EI = 3,000 \text{ kN-m}^2$
- 外力： $w_1 = 4 \text{ kN/m}$ ， $w_2 = 3 \text{ kN/m}$

(2) 待求

- 變位： Δ_C ， Δ_D

(3) 方法

- 限共軛梁法

(4) 思路

- (外力) $\rightarrow$ (內力) $\rightarrow$ (變位)

參考解答

(1) (外力) $\rightarrow$ (內力)

- 依據力的平衡
繪製 M 圖 (圖 a)。

(2) (內力) $\rightarrow$ (變位)

- 依據共軛梁法
繪製共軛梁 (圖 b)。其中

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{66}{EI} \right) (6) = \frac{198}{EI} \quad (\downarrow)$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{72}{EI} \right) (6) = \frac{144}{EI} \quad (\uparrow)$$

$$F_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{EI} \right) (2) = \frac{4}{EI} \quad (\uparrow)$$

$$\begin{aligned} \text{圖 c} [\Sigma \bar{M}_B = 0]: 6\bar{V}_A + 1.5F_2 &= 2F_1 \\ \Rightarrow \bar{V}_A &= \frac{30}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{圖 c} [\Sigma \bar{F}_y = 0]: \bar{V}_B + F_1 &= \bar{V}_A + F_2 \\ \Rightarrow \bar{V}_B &= -\frac{24}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{圖 d} [\Sigma \bar{M}_C = 0]: \bar{M}_C &= 1.5F_3 + 2\bar{V}_B \\ \Rightarrow \bar{M}_C &= -\frac{42}{EI} = -\frac{42}{3000} = -0.014 \text{ m} = \Delta_C \end{aligned}$$

$$\text{圖 e} [\Sigma \bar{M}_D = 0]: \bar{M}_D + 1F_4 = 3\bar{V}_A + 0.75F_5$$

【實力讀書會-大家一起來討論】

實力每週精選考題，隔週公佈解答。

先透過獨立思考及自我演練，

再藉由讀書會做線上觀念交流及經驗分享。

有效複習才能厚植實力，

讓您的學習更精進！歡迎大家一起來加入！

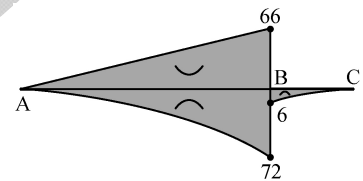


圖 a 彎矩圖 (單位：kN-m)

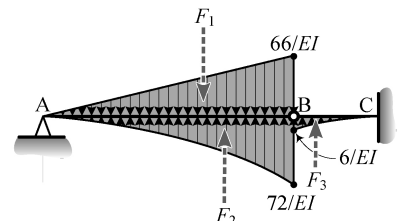


圖 b 共軛梁

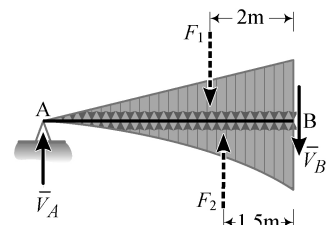


圖 c 分離體圖

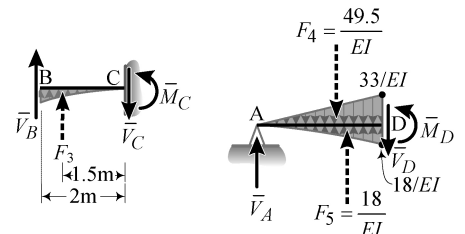


圖 d

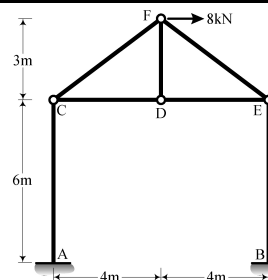
圖 e

$$\Rightarrow \overline{M}_D = \frac{54}{EI} = \frac{54}{3000} = 0.018 \text{ m} = \Delta_D$$

Ans：垂直位移 $\Delta_C = 0.014 \text{ m}$ ($\uparrow$)， $\Delta_D = 0.018 \text{ m}$ ($\downarrow$)

※本題請參考“實力結構學上冊講義—P4-17〔例 4-9〕”

二、右圖平面構架點 A 及 B 為固定，點 C、D、E 及 F 為鉸接，此構架點 F 承受一水平載重 8 kN，考慮桿件軸向及撓曲變形，設所有桿件 $EA = 20,000 \text{ kN}$ ， $EI = 8,000 \text{ kN-m}^2$ ，試求點 F 水平位移。(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 103 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度： $EA = 20,000 \text{ kN}$ ， $EI = 8,000 \text{ kN-m}^2$
- 外力： $P = 8 \text{ kN} \rightarrow$

(2) 待求

- 變位： Δ_{Fx}

(3) 方法

- 單位力法

(4) 思路

- (外力) $\rightarrow$ (內力) $\rightarrow$ (變位)

參考解答

(1) 準備工作

- 簡化問題

原題目為一次靜不定的組合結構，但因具有反對稱，

$N_{DF} = N_{CD} = N_{DE} = 0$ ，所以可以簡化為靜定結構來處理。

(2) (外力) $\rightarrow$ (內力)

- 依據力的平衡

考慮真實外力作用下(圖 a)，計算 M 及 N；考慮單位力作用下(圖

b)，計算 m 及 n。AC 段：原點在 C 點， $0 < x < 6 \text{ m}$ 。

$$M = 4x$$

$$m = x/2$$

另外

$$N_{CF} = 5, \quad n_{CF} = 5/8$$

$$N_{AC} = 3, \quad n_{AC} = 3/8$$

(3) (內力) $\rightarrow$ (變位)

- 依據單位力法

$$\Delta_{Fx} = \int \frac{Mm}{EI} dx + \Sigma \left(\frac{NnL}{EA} \right)$$

【實力小叮嚀】

實力特別提醒您，
別錯過報名時間喔！

技師考試：8/5~8/14

地方特考：9/11~9/23

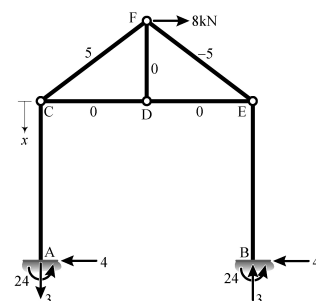


圖 a 真實外力作用

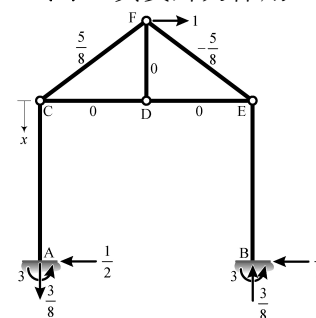


圖 b 單位力作用

Note

∴ 反對稱

∴ 取半計算再乘 2 倍

Note

不要漏掉梁桿件的軸力變形！

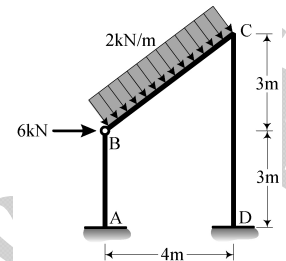
$$= 2 \left[\int_0^6 \frac{(4x)(x/2)}{8,000} dx + \frac{(5)(5/8)(5) + (3)(3/8)(6)}{20,000} \right]$$

$$= 0.0382 \text{ m}$$

Ans：F 點水平位移 $\Delta_{Fx} = 0.0382 \text{ m}$ (→)

※本題請參考“實力結構學題型班講義－P3-29〔3-17〕”

三、右圖平面構架點 A 及 D 為固定，點 B 為鉸接，此構架點 B 承受一水平集中載重 6 kN，桿件 BC 承受一垂直於桿件之均佈載重，沿桿件方向每公尺 2 kN。設所有桿件 EI 為定值，且忽略桿件軸向變形，試用彎矩分配法，求支承 A 之反力，並繪出此結構之彎矩圖。(25 分)



【解題老師】林冠丞老師

• 103 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 剛度：EI
- 外力：P = 6 kN，w = 2 kN/m

(2) 待求

- 反力
- 內力圖：M dia.

(3) 方法

- 限彎矩分配法

(4) 思路

- (外力) → (內力) → (反力)

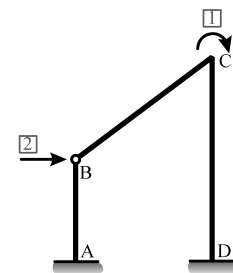


圖 a 自由度

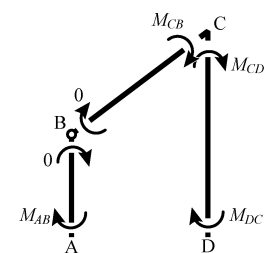


圖 b 待求桿端彎矩

參考解答

(1) 準備工作

- 判別自由度及待求桿端彎矩
本題有雙自由度 (圖 a)，其對應的待求桿端彎矩如圖 b 所示。
- 依據疊加原理
(原結構) = (圖 c 結構) + (圖 d 結構) + (圖 e 結構)

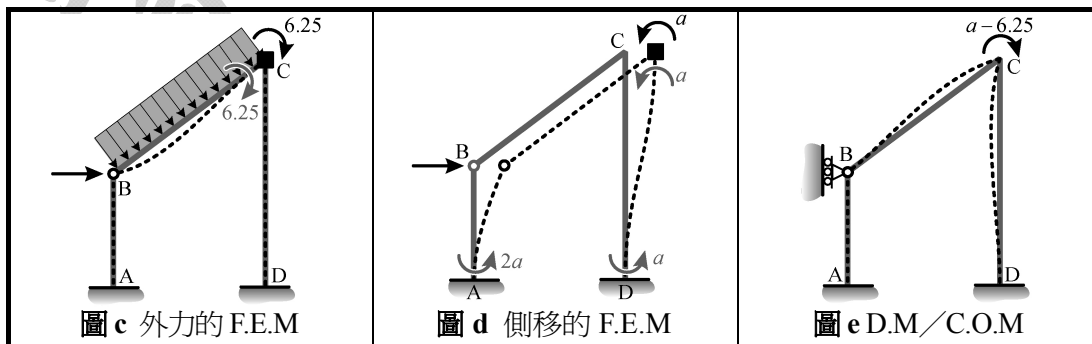


圖 c 外力的 F.E.M

圖 d 側移的 F.E.M

圖 e D.M/C.O.M

$M_{CB}^F = \frac{(2)(5)^2}{8}$ $= 6.25 \text{ kN-m}$	$M_{AB}^F : M_{CD}^F$ $= -\frac{3EI\Delta}{(3)^2} : -\frac{6EI\Delta}{(6)^2}$ $= -2a : -a$ (令 $a = EI\Delta/6$)	$S_{CB} : S_{CD}$ $= \frac{3EI}{5} : \frac{4EI}{6}$ $= 9 : 10$
--	---	--

(2) (外力) → (內力) → (反力)

- 列表計算

結點	A	C		D
E.M	AB	CB	CD	DC
D.F	0	9/19	10/19	0
F.E.M	$-2a$	6.25	$-a$	$-a$
D.M		$-2.961 + 0.474a$	$-3.289 + 0.526a$	
C.O.M				$-1.645 + 0.263a$
ΣM	$-2a$	$3.289 + 0.474a$	$-3.289 - 0.474a$	$-1.645 - 0.737a$

- 依據力的平衡

$$\text{圖 f} [\Sigma F_x = 0]: \frac{M_{AB}}{3} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{6} + 6 + 10\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$67.066 - 5.211a = 0$$

$$\Rightarrow a = 12.87$$

將 a 值代回上表中，可得各桿端彎矩進一步再繪彎矩圖（圖 g）

及計算 A 點反力。

Ans: (a) 彎矩圖如圖 g 所示

(b) A 點反力

$$A_x = 8.58 \text{ kN} (\leftarrow), A_y = 1.97 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_A = 25.74 \text{ kN-m} (\curvearrowright)$$

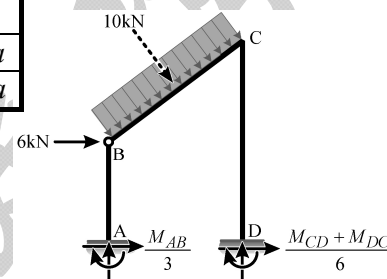


圖 f 分離體圖

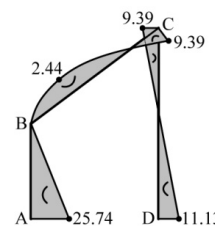
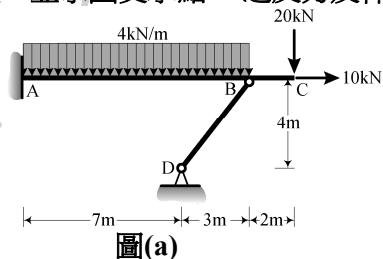


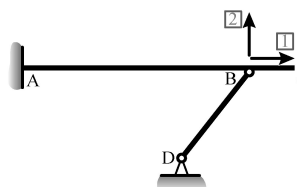
圖 g 彎矩圖（單位：kN-m）

※本題請參考“實力結構學下冊講義—P9-46 [I3.3-1]”

四、下圖(a)結構點 A 為固定，點 B 連接一軸力桿 BD，此結構承受載重如圖所示。設所有桿件 E 相同，桿件 AB 及 BC 慣性矩 $I = 0.02 \text{ m}^4$ ，面積 $A = 0.2 \text{ m}^2$ ，桿件 BD 面積 $A = 0.1 \text{ m}^2$ 。若此結構位移自由度簡化為 2 個自由度如下圖(b)所示，在考慮桿件軸向及撓曲變形下，試用直接勁度法求對應這些自由度之勁度矩陣及外力向量，並求出支承點 A 之反力及桿件 BD 內力。(25 分)



圖(a)



圖(b)

【解題老師】林冠丞老師

• 103 年土木高考試題 •

問題剖析

(1) 已知

- 材料性質： E

- 幾何性質： $I_{AB} = I_{BC} = 0.02 \text{ m}^4$
 $A_{AB} = A_{BC} = 0.2 \text{ m}^2$
 $A_{BD} = 0.1 \text{ m}^2$
- 外力： $P_x = 10 \text{ kN}$ ， $P_y = 20 \text{ kN}$
 $w = 4 \text{ kN/m}$

(2)待求

- 勁度矩陣
- 外力向量
- 反力： A_x ， A_y ， M_A
- 內力： N_{BD}

(3)方法

- 限直接勁度法

(4)思路

- (結構型式) → (勁度矩陣)
- (外力) → (變位) → (內力)

參考解答

(1)準備工作

- 設定座標
 題目已給定 r, R 座標，因此只需設定 q, Q 座標 (圖 a)。
- 依據疊加原理
 (原結構) = (圖 b 結構) + (圖 c 結構)

圖 b：約束自由度

$$[Q^F] = \begin{bmatrix} -(4)(10)^2/8 + (20)(2)/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \text{ kN-m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

圖 c：放鬆自由度

$$[R] = \begin{bmatrix} 10 \text{ kN} \\ -41 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

(2) (結構型式) → (勁度矩陣)

- 依據勁度係數的定義

圖 d：令 $r_1 = 1, r_2 = 0$ ，可得

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{EA_1}{L_1}(1) + \frac{EA_2}{L_2}\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{E(0.2)}{10}(1) + \frac{E(0.1)}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 0.0272E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{21} &= \frac{EA_2}{L_2}\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{E(0.1)}{5}\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 0.0096E \end{aligned}$$

圖 e：令 $r_2 = 1, r_1 = 0$ ，可得

$$K_{12} = 0.0096E$$

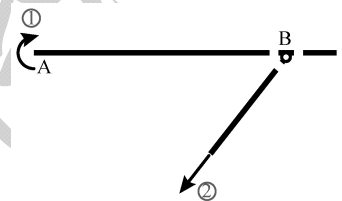
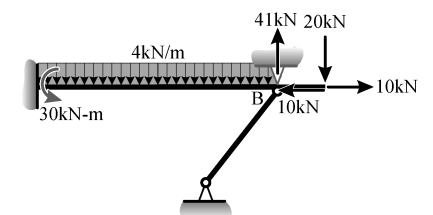
圖 a q, Q 座標

圖 b 約束自由度

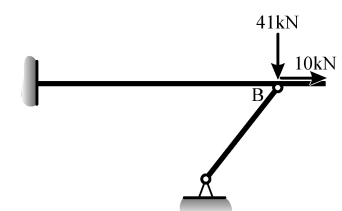
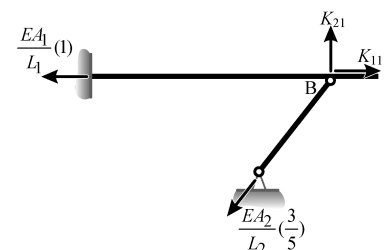
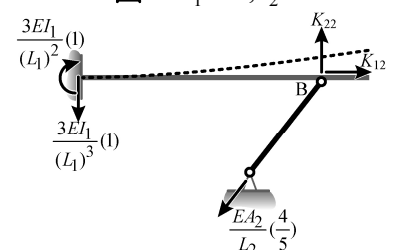


圖 c 放鬆自由度

圖 d $r_1 = 1, r_2 = 0$ 圖 e $r_2 = 1, r_1 = 0$

$$K_{22} = \frac{3EI_1}{(L_1)^3}(1) + \frac{EA_2}{L_2}\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{3E(0.02)}{(10)^3}(1) + \frac{E(0.1)}{(5)}\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 0.01286E$$

$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 0.0272E & 0.0096E \\ 0.0096E & 0.01286E \end{bmatrix}$$

(3) (外力) → (變位)

- 依據勁度矩陣連結外力－變位關係

$$[R] = [K][r]$$

或

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0272E & 0.0096E \\ 0.0096E & 0.01286E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2027/E \\ -4701/E \end{bmatrix}$$

(4) (變位) → (內力)

- 依據內力轉換關係

$$[Q] = [T][r] + [Q^F]$$

或

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \times 10^{-4}E \\ 0.012E & 0.016E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2027/E \\ -4701/E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32.82 \text{ kN-m} \\ -50.89 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

Ans : (a)勁度矩陣

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.0272E & 0.0096E \\ 0.0096E & 0.01286E \end{bmatrix}$$

(b)外力向量

$$[R] = \begin{bmatrix} 10 \text{ kN} \\ -41 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

(c)A 點反力及 BD 桿內力如圖 f 所示

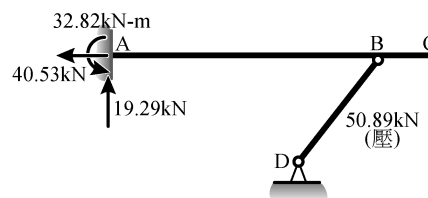


圖 f

※本題請參考“實力結構矩陣講義－P4-69〔例 4.30〕”

【講求效率創造實力】

- 籃球比賽不是比誰上場最久，也不是比誰出手最多，而是比誰“進球得分”最多！
- 參加考試不是比誰唸書最久，也不是比誰寫得最多，而是比誰“答對得分”最多！
- 用最短的時間獲取最高的分數，實力題型班讓您高效率得分才是王道！

實力網站上提供高普考部份科目解答

<http://www.shi-li.com.tw/>

實力技師“題型班”含最新試題完整詳解